Спектральный анализ разностных схем

1 Необходимое спектральное условие устойчивости Неймана

Рассмотрим двухслойную схему

$$\begin{cases} By_t + Ay = 0, \\ y^0 = u^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где операторы A и B являются постоянными, а оператор B имеет ограниченный обратный. Тогда уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$y^{j+1} = (E - \tau B^{-1}A)y^j, \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1.$$

Пусть оператор перехода со слоя на слой $S = E - \tau B^{-1}A$ линеен. Если схема (1.1) устойчива, то справедлива оценка

$$\|y^j\| \leqslant M\|y^0\|, \ \ j = 1, 2, ..., j_0. \tag{1.2}$$

В качестве нормы $\|\cdot\|$ на слое j ($j = 0, 1, ..., j_0$) выберем разностный аналог равномерной нормы:

$$\|y^j\| = \max_n |y^j_n|.$$

Если задача (1.1) устойчива по начальным данным, то условие (1.2) выполняется, в частности, если начальная функция представляет собой какую-нибудь гармонику:

$$y^0_n = e^{i\alpha n}, \quad n = 0, 1, ..., n_0,$$

где α — вещественный параметр. Так как по предположению оператор $(E - \tau B^{-1}A)$ линеен, то

$$y^1 = (E - \tau B^{-1}A)y^0 \ \Rightarrow \ y^1_n = \lambda e^{i\alpha n}, \ \ n = 0, 1, ..., n_0, \tag{1.3}$$

где $\lambda = \lambda(\alpha)$ — число, не зависящее от n, которое получается, если в правой части выражения (1.3) вынести $e^{i\alpha n}$ за скобку. Но тогда

$$y^2 = (E - \tau B^{-1}A)y^1 = \lambda(E - \tau B^{-1}A)y^0 = \lambda^2 e^{i\alpha n} \;\;\Rightarrow\;\; y^j = \lambda^j e^{i\alpha n}.$$

Следовательно,

$$\max_n |y_n^j| = |\lambda(\alpha)|^j \max_n |e^{i\alpha n}| = |\lambda(\alpha)|^j.$$

Для выполнения условия (1.2) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$|\lambda(\alpha)|^j \leqslant M, \quad j = 0, 1, ..., j_0,$$

которое будет заведомо выполнено, если

$$|\lambda(\alpha)| \leqslant 1 + C_1\tau, \tag{1.4}$$

где C_1 — число, которое не зависит ни от шагов сетки, ни от входных данных. В самом деле,

$$(1 + C_1\tau)^j \leqslant e^{C_1\tau j} \leqslant e^{C_1 T} = M, \qquad T = \tau j_0.$$

Гармоника $e^{i\alpha n}$ является собственной функцией оператора перехода $(E - \tau B^{-1}A)$ со слоя j на $j+1$, соответствующей собственному значению $\lambda(\alpha)$.

Линия, которую пробегает точка $\lambda(\alpha)$ на комплексной плоскости, когда α принимает все возможные значения на вещественной оси, является спектром оператора перехода со слоя на слой.

Утверждение 1.1 *(Необходимое спектральное условие Неймана устойчивости схемы по начальным данным):*
спектр оператора перехода со слоя на слой должен лежать в круге радиуса $1 + C_1\tau$ на комплексной плоскости.

Замечание 1.2 *Если спектр не зависит от τ, то условие (1.4) равносильно требованию, чтобы спектр лежал в единичном круге:*

$$|\lambda(\alpha)| \leqslant 1. \tag{1.5}$$

2 Примеры

Рассмотрим ряд разностных схем, соответствующих задаче Коши для уравнения переноса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0, T] \\ u(x,0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Пример 2.1. *Исследуйте на устойчивость схему*

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \dfrac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Решение. Шаблон рассматриваемой схемы представлен на рис.1:

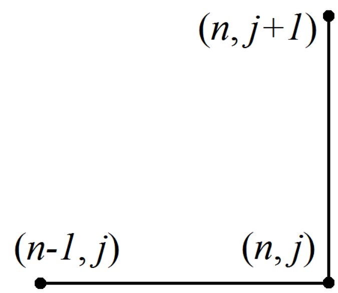

Рис. 1: Шаблон схемы

Возьмем в качестве начального условия гармонику $e^{i\alpha n}$. Рассмотрим оператор перехода со слоя на слой:

$$y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{\tau}{h}\left(y_n^j - y_{n-1}^j\right).$$

Пусть $\dfrac{\tau}{h} = r = const$. Тогда при $j = 0$ получаем:

$$y_n^1 = e^{i\alpha n} - r\left(e^{i\alpha n} - e^{i\alpha(n-1)}\right) = \underbrace{\left\{1 - r(1 - e^{-i\alpha})\right\}}_{\lambda(\alpha)} e^{i\alpha n} = \lambda e^{i\alpha n}.$$

Следовательно, при выбранных начальных условиях

$$y_n^j = \lambda^j e^{i\alpha n}, \quad j = 1, 2, ..., j_0,$$

где

$$\lambda(\alpha) = 1 - r(1 - e^{-i\alpha}) = 1 - r + re^{-i\alpha}.$$

Спектр $\lambda(\alpha)$ рассматриваемой задачи представляет собой окружность с центром в точке $1-r$ и радиусом r. Так как $\lambda(\alpha)$ не зависит от τ, то спектральный критерий устойчивости схемы имеет вид

$$|\lambda(\alpha)| \leqslant 1,$$

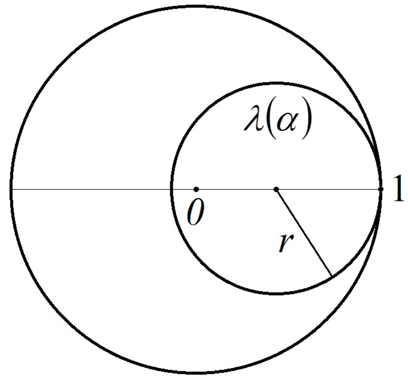

Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой

то есть он должен полностью содержаться в круге единичного радиуса с центром в нуле на комплексной плоскости. Из рис.2 очевидно, что это условие выполнено при $r \leqslant 1$.

Пример 2.2. *Исследуйте на устойчивость схему*

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \dfrac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Решение. Шаблон рассматриваемой схемы представлен на рис.3: Возьмем в качестве

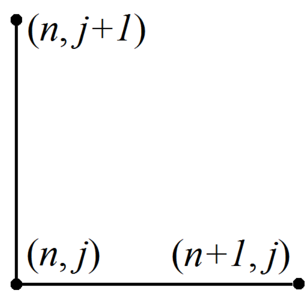

Рис. 3: Шаблон схемы

начального условия гармонику $e^{i\alpha n}$. Тогда решение имеет вид:

$$y_n^j = \lambda^j e^{i\alpha n}, \quad j = 1, 2, ..., j_0.$$

Для того, чтобы найти $\lambda(\alpha)$, подставим это выражение в уравнение:

$$y_n^{j+1} = y_n^j - \frac{\tau}{h}\left(y_{n+1}^j - y_n^j\right) \;\Rightarrow\; \lambda^{j+1} e^{i\alpha n} = \lambda^j e^{i\alpha n} - \frac{\tau}{h}\left(\lambda^j e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^j e^{i\alpha n}\right) \;\Rightarrow$$

$$\lambda = 1 - \frac{\tau}{h}\left(e^{i\alpha} - 1\right).$$

Пусть $\dfrac{\tau}{h} = r = const$. Тогда спектр оператора перехода со слоя на слой имеет вид:

$$\lambda = 1 + r - re^{i\alpha}$$

и представляет собой окружность с центром в точке $1+r$ и радиусом r. Из рис. 4 видно, что условие Неймана для рассматриваемой схемы всегда не выполнено.

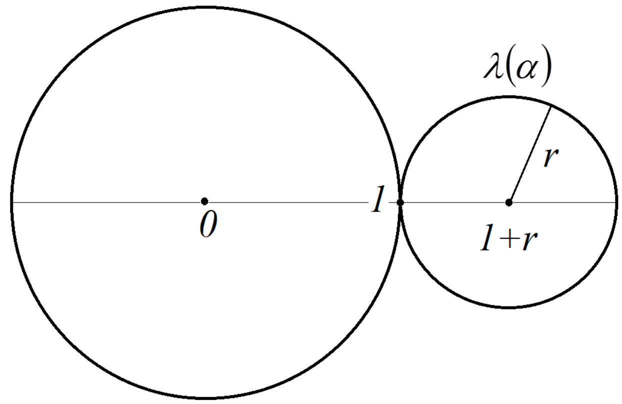

Рис. 4: Спектр оператора перехода в примере 2.2.

Пример 2.3. *Исследуйте на устойчивость с помощью спектрального критерия явную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \ \ t \in (0, T], \\ u(x,0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение. Явная схема для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Возьмем в качестве начального условия гармонику $e^{i\alpha n}$. Тогда решение имеет вид:

$$y_n^j = \lambda^j e^{i\alpha n}, \quad j = 1, 2, ..., j_0.$$

Подставляя его в уравнение и сокращая на $\lambda^j e^{i\alpha n}$, получаем:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} = 0.$$

Так как

$$\frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{4} = -\left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i} \right)^2 = -\sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

то

$$\lambda(\alpha) = 1 - 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

При изменении α число $\lambda(\alpha)$ пробегает отрезок

$$1 - 4ra^2 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

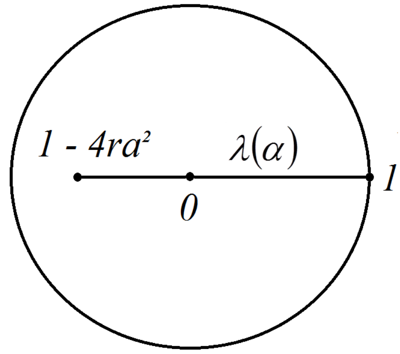

Рис. 5: Спектр оператора перехода в примере 2.3.

Условие Неймана выполнено, если

$$1 - 4ra^2 \geqslant -1 \;\;\Rightarrow\;\; r \leqslant \frac{1}{2a^2} \;\;\Leftrightarrow\;\; \tau \leqslant \frac{h^2}{2a^2}.$$

Пример 2.4. *Исследуйте на устойчивость с помощью спектрального критерия неявную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение. Неявная схема для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Беря в качестве начального условия гармонику $e^{i\alpha n}$, получаем:

$$y_n^j = \lambda^j e^{i\alpha n}, \quad j = 1, 2, ..., j_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - 1 - \frac{a^2 \tau}{h^2} \lambda \left(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha} \right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Спектр $\lambda(\alpha)$ заполняет отрезок вещественной оси:

$$\frac{1}{1 + 4ra^2} \leqslant \lambda(\alpha) \leqslant 1,$$

то есть условие Неймана выполнено при любом r.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \;\; t \in (0, T], \\ u(x, y, 0) = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Пример 2.5. *Исследуйте на устойчивость с помощью спектрального критерия явную схему для сформулированной выше задачи.*

Решение. Введем сетку:

$$x_n = h_x n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ \ y_m = h_y m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ \ t_j = \tau j,\ j = 0, 1, ..., j_0.$$

В случае двух пространственных переменных явная схема для уравнения теплопроводности имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{n,m}^{j+1} - v_{n,m}^{j}}{\tau} - \dfrac{v_{n+1,m}^{j} - 2v_{n,m}^{j} + v_{n-1,m}^{j}}{h_x^2} - \\ \quad - \dfrac{v_{n,m+1}^{j} - 2v_{n,m}^{j} + v_{n,m-1}^{j}}{h_y^2} = 0, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \\ v_{n,m}^{0} = \mu(x_n, y_m) \equiv \mu_{n,m}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Задавая начальную функцию $v_{n,m}^0$ в виде двумерной гармоники, зависящей от двух вещественных параметров α и β:

$$v_{n,m}^0 = e^{i(\alpha n + \beta m)},$$

найдем решения вида

$$v_{n,m}^j = \lambda^j e^{i(\alpha n + \beta m)},$$

где

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} - \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2} = 0 \ \ \Rightarrow\ \ \lambda(\alpha, \beta) = 1 - 4r_x \sin^2\frac{\alpha}{2} - 4r_y \sin^2\frac{\beta}{2},$$

где $r_x = \dfrac{\tau}{h_x^2}$ и $r_y = \dfrac{\tau}{h_y^2}$. Пусть $r = \max\{r_x, r_y\}$. Тогда при изменении параметров α и β точка $\lambda(\alpha, \beta)$ пробегает отрезок

$$1 - 8r \leqslant \lambda(\alpha) \leqslant 1$$

вещественной оси. Необходимое условие Неймана устойчивости схемы выполняется, если

$$1 - 8r \geqslant -1 \quad \Rightarrow \quad r \leqslant \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \tau \leqslant \frac{\min\{h_x^2, h_y^2\}}{4}.$$

С помощью спектрального критерия можно исследовать и трехслойные линейные схемы. Рассмотрим, например, задачу Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \ t \in (0, T]; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \tag{2.1}$$

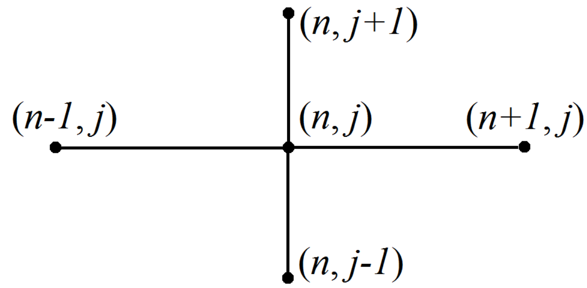

Рис. 6: Шаблон для разностного уравнения колебаний

Аппроксимируем задачу (2.1) с помощью разностной схемы, шаблон которой представлен на рис. 6 Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - \dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 1, 2, ..., j_0 - 1; \\ y_n^j = \varphi(x_n) \equiv \varphi_n, \quad \dfrac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi(x_n) \equiv \psi_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Пусть $\varphi_n = e^{i\alpha n}$ и $\psi_n = e^{i\alpha n}$. Тогда, в силу линейности и однородности уравнения, получим решения вида $y_n^j = \lambda^j e^{i\alpha n}$. Подставляя это решение в разностное уравнение и сокращая на $\lambda^{j-1} e^{i\alpha n}$, приходим к квадратному уравнению:

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\tau^2} - \lambda \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)\lambda + 1 = 0, \quad r = \frac{\tau}{h}.$$

Произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1. Если его дискриминант

$$D(\alpha) = 4\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 = 16r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\left(r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

отрицателен, то корни $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_2(\alpha)$ комплексно сопряжены и равны 1 по модулю. При

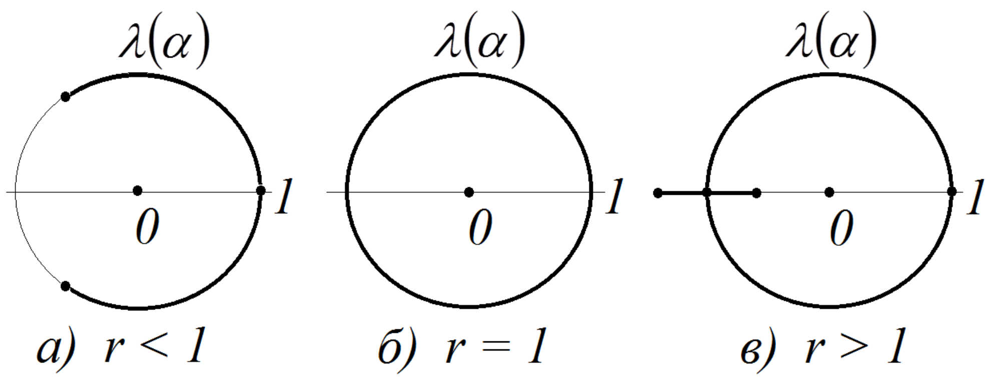

Рис. 7: Спектр схемы для уравнения колебаний

$r < 1$ дискриминант отрицателен при всех α, поэтому при изменении α комплексно-сопряженные корни $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_2(\alpha)$ пробегают часть окружности радиуса 1 (рис.7 а). При $r = 1$ спектр заполняет всю единичную окружность (рис.7 б). При $r > 1$ по мере увеличения α от нуля до π корни движутся из точки $\lambda = 1$ по единичной окружности, один по часовой стрелке, а другой против часовой стрелки, пока не сойдутся в точке $\lambda = -1$. Затем один из корней пойдет по вещественной оси из точки $\lambda = -1$ влево, а другой — вправо, причем $\lambda_1\lambda_2 = 1$ (рис.7 в).

Итак, необходимое условие устойчивости выполняется при $r \leqslant 1$.

Рассмотрим второй возможный подход к построению и исследованию разностных схем для уравнения колебаний. Задача Коши (2.1) для уравнения колебаний на прямой эквивалентна следующей задаче для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial x} & \\ & x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0,T]; \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} & \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ & x \in \mathbb{R}^1, \\ v(x,0) = \tilde{\psi}(x) & \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\tilde{\psi}(x)$ — первообразная функции $\psi(x)$. Введем векторы-столбцы:

$$w(x,t) = (u(x,t),\; v(x,t))^{\mathrm{T}}, \qquad \Phi(x) = \Big(\varphi(x),\; \tilde{\psi}(x)\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим задачу (2.2) в векторной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - A\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0,T]; \\ w(x,0) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Схема 1.

$$\begin{cases} \dfrac{w_n^{j+1} - w_n^j}{\tau} - A\dfrac{w_{n+1}^j - w_n^j}{h} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1, \\ w_n^0 = \Phi(x_n) \equiv \Phi_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases} \tag{2.4}$$

Под спектром разностной схемы в случае системы уравнений будем понимать совокупность всех λ, при которых однородная система имеет решения вида:

$$w_n^j = \lambda^j \cdot w^0 e^{i\alpha n}, \tag{2.5}$$

где w^0 — числовой вектор-столбец: $w^0 = (u^0,\; v^0)^{\mathrm{T}}$.

Подставляя выражение (2.5) в уравнение (2.4) и сокращая на $\lambda^j e^{i\alpha n}$, получаем систему:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} w^0 - A\frac{e^{i\alpha} - 1}{h} w^0 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \big((\lambda - 1)E - r(e^{i\alpha} - 1)A\big)\, w^0 = 0, \;\; r = \frac{\tau}{h}.$$

Данная система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\left|(\lambda-1)E - r(e^{i\alpha}-1)A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -r(e^{i\alpha}-1) \\ -r(e^{i\alpha}-1) & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - r^2(e^{i\alpha}-1)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}, \quad \lambda_2(\alpha) = 1 + r - re^{i\alpha}.$$

Корни $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_2(\alpha)$ при изменении вещественного параметра α пробегают окружности радиуса r с центрами в точках $1-r$ и $1+r$ (рис. 8). Таким образом, условие устойчивости Неймана не выполнено ни при каком r.

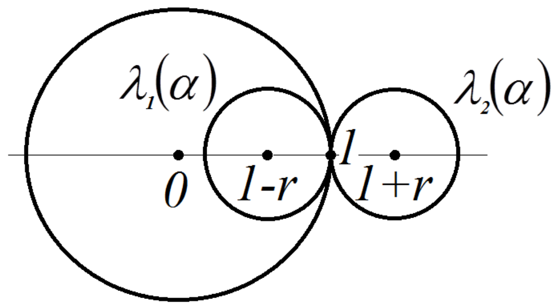

Рис. 8: Спектр схемы (2.4)

Схема 2.

$$\begin{cases} \dfrac{w_n^{j+1}-w_n^j}{\tau} - A\dfrac{w_{n+1}^j - w_{n-1}^j}{2h} - \\ \qquad - \dfrac{\tau}{2h^2}\left(w_{n+1}^j - 2w_n^j + w_{n-1}^j\right) = 0, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1, \\ \\ w_n^0 = \Phi(x_n) \equiv \Phi_n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ... \end{cases} \tag{2.6}$$

Эта схема аппроксимирует задачу (2.3) со вторым порядком точности (по времени и координате). В самом деле, если $w(x,t)$ — достаточно гладкая функция непрерывно меняющихся аргументов x и t, то

$$w_t(x,t) = \frac{1}{\tau}\left(w(x,t) + \tau\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + O(\tau^3) - w(x,t)\right) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Если $w(x,t)$ — решение задачи (2.3), то

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = A\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial w}{\partial x}\right) = A^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

причем

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Следовательно, выражение $w_t - \dfrac{\tau}{2} w_{\bar{x}x} - A w_{\dot{x}}$ будет аппроксимировать уравнение (2.3) со вторым порядком точности по времени, а также по координате за счет симметрии разностных производных.

Характеристическое уравнение для схемы (2.6) имеет вид:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} w^0 - A \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h} w^0 - \frac{\tau}{2h^2} \left(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha} \right) w^0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1) w^0 - ir \sin\alpha A w^0 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} w^0 = 0, \quad r = \frac{\tau}{h} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 + 2r^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} & -ir\sin\alpha \\ -ir\sin\alpha & \lambda - 1 + 2r^2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\lambda - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2 = -r^2 \sin^2 \alpha.$$

Из характеристического уравнения находим спектр схемы 2:

$$\lambda_1(\alpha) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + ir \sin\alpha, \quad \lambda_2(\alpha) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - ir \sin\alpha.$$

Следовательно,

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha = 1 - 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4r^4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 1 + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(-1 + r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + 4r^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} (r^2 - 1).$$

Таким образом, условие

$$|\lambda| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - |\lambda|^2 \geqslant 0$$

выполнено, если $r \leqslant 1$, и не выполнено, если $r > 1$.

Итак, подведем итог. Если необходимое условие Неймана устойчивости схемы по начальным данным не выполнено, то ни при каком выборе норм нельзя ожидать устойчивости схемы, а в случае его выполнения можно надеяться, что при некотором разумном выборе норм устойчивость имеет место. Таким образом, это условие позволяет отбраковывать заведомо негодные схемы, для которых условие Неймана не выполняется, и исследовать потенциально пригодные схемы (для которых условие Неймана выполнено) более мощными методами, например, энергетическими.